ブラウン運動論と量子力学

佐賀大・理工・化学　　竹　山　尚　賢

（8月13日受理）

§1　対応論的考察

量子力学における波動方程式とブラウン運動論における拡散方程式との類似性から，あるいは量子力学における不確定性関係とブラウン運動論におけるそれと類似な関係との対応から，両理論の間の相互関係が注目されていたことはよく知られている。

この方向の一つの流れは Wiener らの differential space の理論となっているものと考えられるし，[1] 別な流れは斎藤，並木両氏によって展開された研究にみられるように Wiener 積分と Feynman 積分との対応と変分原理に基くブラウン運動論の"量子化"であった。[2] 一方，量子力学自体についても，その描像が検討され続けてきた（Bohm，de Broglie）[3]。

Schrodinger 方程式

$$i\hbar\,\partial\psi/\partial t = -(\hbar^2/2m)\,\Delta\psi + u\psi \tag{1}$$

$$\psi = A\exp(iS/\hbar),\ (A, S : \mathrm{real}) \tag{2}$$

を用いると，実数部分と純虚数部分とに別れ，次の二式になる。

$$\partial S/\partial t + (1/2m)(\nabla S)^2 + u - (\hbar^2/2m)(\Delta A/A) \qquad (1\cdot a)$$

$$= 0 \qquad (1\cdot a)$$

$$\partial A/\partial t + (1/2m)\,A\Delta S + (1/m)\nabla S\cdot\nabla A$$

$$= 0 \qquad (1\cdot b)$$

（1・b）の方は 2A をかけ，$A^2 = \rho$ とおくと近似なしで連続の式

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,(\rho\,\nabla S/m) = 0 \qquad (1\cdot b')$$

となるに対し，（1・a）には古典論における Hamiltcn–Jacobi の式との対応がつかない量子ポテンシャル $-\hbar^2 \triangle A / 2mA$ が現われて，様々の論議をよんだのであった。結局，古典的対応物は，そしてその古典的解釈は断念されてしまったかにみえるが，A（確率振幅）$= \rho^{1/2}$ により確率密度と関係するところから，拡散流との対応が検討されたのは賢明な，自然なことといえるであろう（Fényes）。[4]

密度勾配に関係する拡散速度 $\vec{v}_d$ は，拡散方程式

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,(\vec{v}_d\,\rho) = 0 \qquad (3\cdot a)$$

$$\vec{v}_d = -\,D\,\mathrm{grad}\,\ell n\,\rho \qquad (3\cdot b)$$

から知られるように，粒子密度の対数の勾配に比例する。そこで，

$$\nabla S = m\vec{v} \qquad (4)$$

による力学的速度 $\vec{v}$ とともに

$$\ell n\,A = (1/2)\,\ell n\,\rho = R/\hbar \qquad (5)$$

とおいて

$$\nabla R = m\vec{u} \qquad (6)$$

により“拡散速度”$\vec{u}$ を導入しよう。これにより，（1・a, &, b）は次式となる。

$$\partial S/\partial t + (1/2m)(\nabla S)^2 + u - (1/2m)(\nabla R)^2 - (\hbar/2m)\triangle R = 0, \qquad (7\cdot a)$$

$$\partial R/\partial t + (\hbar/2m)\triangle S + (1/m)\,\nabla S\cdot\nabla R = 0 \qquad (7\cdot b)$$

あるいは，

$$\partial S/\partial t = -\,mv^2/2 - U + mu^2/2 + (\hbar/2)\,\mathrm{div}\,\vec{u}, \qquad (8\cdot a)$$

$$\partial R/\partial t = -\,m\vec{v}\cdot\vec{u} - (\hbar/2)\,\mathrm{div}\,\vec{v} \qquad (8\cdot b)$$

これらの両辺の grad をとり，(4)，(6) により整理すると，

$$m\,\partial\vec{v}/\partial t = -m(\vec{v}\nabla)\vec{v} - \nabla u$$
$$+ m(\vec{u}\nabla)\vec{u} + (\hbar/2)\Delta\vec{u}, \qquad (9\cdot a)$$

$$m\,\partial\vec{u}/\partial t = -m\nabla(\vec{v}\cdot\vec{u}) - (\hbar/2)\Delta\vec{v} \qquad (9\cdot b)$$

となる。この連立非線型偏微分方程式を，初期条件，$\vec{v}(0)$，$\vec{u}(0)$ の下に解くことに帰着したのであるが，依然，量子論的起源の力の項が相互に連結しあっている。古典的力学の中に（9·a，&，b）と対応する力の方程式は存在しないが，Planck 定数の 1 次に比例する問題の項が次のようにして〝拡散〟と結びつくことがわかる。

$\vec{u}$は元来，拡散の流れ速度との対応（3·b）から導入されたものであった。(3) は，自由拡散の式であるから，二種の速度が現われる術もないが，それでも対応論的考察には役立つ。

$$\partial\vec{v}_d/\partial t = -D\ \mathrm{grad}\ \partial\ \ell n\ \rho/\partial t$$
$$= D\ \mathrm{grad}\left\{\frac{\mathrm{div}(\vec{v}_d\rho)}{\rho}\right\}$$
$$= D\Delta\vec{v}_d - \nabla(\vec{v}_d\cdot\vec{v}_d)$$

であるから，$-\vec{v}_d = \vec{u}$，$D = \hbar/2m$ と対応させれば

$$m\,\partial\vec{u}/\partial t = -(\hbar/2)\Delta\vec{u} - m\nabla u^2$$

これが $\vec{u}=\vec{v}$ の場合の (9·b) であり，(9·a) からは，

$$m\,\partial\vec{u}/\partial t = (\hbar/2)\Delta\vec{u}$$

がえられ，自由粒子の場合，当然のことながら

$$m\,\partial\vec{u}/\partial t = -(m/2)\nabla u^2$$
$$= -m(\vec{u}\nabla)\vec{u}$$

がでることになる。

そこで，対応論的考察としては，拡散係数との対応関係

$$D = \hbar/_{2m} \tag{10}$$

をみておけばよいであろう。

量子力学における不確定性関係は，

$$\triangle p = p-(\psi,\ p\psi)$$

$$\triangle q = q-(\psi,\ q\psi)$$

ととって，それぞれの2乗平均根を

$$<\delta p> = \{2(\psi,\ \triangle p^2\psi)\}^{1/2}$$

$$<\delta q> = \{2(\psi,\ \triangle q^2\psi)\}^{1/2}$$

ととり，

$$<\delta p><\delta q> \geq \hbar \tag{11}$$

で与えられるが，拡散の方からの不確定性関係は次のようにDの現象論的定義式に由来するものである。

自由拡散の式（3・a，&，b）で，$t=0$ における密度 $\rho(q,0)$ が q のいたる処でわかっているとすると，形式解は

$$\begin{aligned}\rho(q,t) &= \exp(Dt\triangle)\ \rho(q,0)\\ &= \exp(Dt\triangle)\int dq'\delta(q-q')\\ &\quad\times \rho(q',0)\\ &= \exp(Dt\triangle)\int dq'\\ &\quad\times (2\Pi)^{-3}\int d^3k\ \exp\{ik(q-q')\}\\ &\quad\times \rho(q',0)\end{aligned}$$

となり，

$$\rho(q, t) = (2\Pi)^{-3}\int dq' \int d^3k \ \exp\left\{-Dtk^2 - ik(q-q')\right\}\rho(q', 0)$$

$$= (4\pi Dt)^{-2/3}\int dq' \ \exp\left\{-(q-q')^2/4Dt\right\} \times \rho(q', 0)$$

と求まる。時間 Δt の間の $\Delta q = q - q'$ の変位確率が

$$W(q+\Delta q, t+\Delta t \mid q, t) = (4\pi D\Delta t)^{-2/3}\exp\left\{-(\Delta q)^2/4D\Delta t\right\}$$

によって与えられているし，これによる Δq の2乗平均は“条件付平均値”として

$$\langle\Delta q^2\rangle = \int d(\Delta q)\, W(q+\Delta q, t+\Delta t \mid q, t) \times \Delta q^2 = 2D\Delta t \tag{12·a}$$

と求まる。これは位置空間における拡散定数の現象論的定義式

$$2D = \langle\Delta q^2\rangle/\Delta t \tag{12·b}$$

とみられる基本式で，これに変位の2乗平均根 $\langle\delta q\rangle = \langle\Delta q^2\rangle^{1/2}$ と速度のそれを $\langle\delta v\rangle = \langle\delta q\rangle/\Delta t = \langle\delta p\rangle/m$ （n；拡散子の質量）とおくと，

$$2mD = \langle\delta q\rangle\langle\delta p\rangle \tag{13}$$

の形の不確定性関係となる。（13）が（11）と対応するものとみなすと

$$D = \hbar/2m$$

が理解される

§2　ブラウン運動の運動学的理論

位相空間におけるブラウン運動の確率過程論は"Langevin の式"

$$dq/dt = p/m$$
$$dp/dt = -\nabla u - \zeta\, p/m + F_f(t) \tag{14}$$

を基礎として展開されるが，これに対応する拡散式は，Kramers の式である。[5)]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(p, q, t)$$
$$= -\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dq}{dt}\right)\rho(p, q, t)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{dp}{dt}\right)\rho(p, q, t)\right], \tag{15·a}$$

$$dq/dt = p/m,$$
$$dp/dt = -\nabla u - \zeta\, p/m - D_p(\partial/\partial p) \times$$
$$\times \ln \rho(p, q, t) \tag{15·b}$$

ここに ζ は抵抗係数であり，D_p は運動量空間における拡散係数

$$D_p = \zeta\, kT \tag{15·c}$$

であり，kTは統計温度である。

(14) と (15·b) との対応から，ゆらぎ力と

$$F_f(t) = -D_p(\partial/\partial p)\ \ln \rho(p, q, t) \tag{15·d}$$

の関係が示唆され，ここには，量子力学にはその対応物がない新しいタイプの不確定性関係

$$\langle \delta F_f\rangle \langle \delta p\rangle = 2D_p \tag{15·e}$$

が存在する。（これを足場に力学をつくれるか否かは検討する価値がありそう

に思われる。)

(15・d) は“抵抗力”$-\zeta\, p/m$ と釣合って,

$$-D_p \frac{\partial}{\partial p} \ln \rho(p, q) = \zeta\, p/m$$

(15・c) によって,運動量平衡分布

$$\rho_{eq}(p) = \text{const} \cdot \exp(-p^2/2m\,kT)$$

を成立させるのであるが,これには,$\tau_p = m/\zeta$ 程度の時間を要するものとみられる。

$t \gg m/\zeta$ の時間スケールでは

$$\rho(p, q, t) = \rho_{eq}(p)\, \rho(q, t)$$

の局所平衡が成立し,(15・a) から後に位置空間における拡散方程式が次の形に残されることとなる。

$$\partial \rho(q, t)/\partial t = -\operatorname{div}\{\vec{V}_d\, \rho(q, t)\}, \qquad (16\cdot a)$$

$$\vec{V}_d = -D \nabla \ln \rho(q, t) - \zeta^{-1} \nabla u(q, t) \qquad (16\cdot b)$$

このとき

$$D = kT/\zeta = D_p/\zeta^2 \qquad (16\cdot c)$$

の関係があり,全拡散速度 $\vec{V}_d$ は,拡散子の密度の対数の勾配に比例する速度 $\vec{V}_t = -D \nabla \ln \rho$ と外力によって流される速度 $\vec{V}_m = -\zeta^{-1} \nabla u$ との和となる。

Langevin の式との関連のもとにのべると,Kramers の拡散過程は

$$\begin{aligned} dq &= (p/m)\, dt \\ dp &= -\nabla u\, dt - \zeta (p/m)\, dt + dp(t) \end{aligned} \qquad (17)$$

において P(t) が分散 D_p を有する Wiener 過程であり,位置空間における拡散過程は

$$dq = -\zeta^{-1} \nabla U \, dt + dQ(t) \tag{18}$$

において Q(t) が分散 D を有する Wiener 過程であるといえる。(17) から (18) への移行は運動量緩和時間 m/ζ より大きな時間をとったとき (17) で力の釣合い $-\nabla U = \zeta(p/m)$ が成立する"極限速度" $p/m = -\zeta^{-1}\nabla U$ で拡散子は系統的に流れるものの，依然，その速度は極限速度のまわりにゆらぐものとみているのである。

ここで前向きの平均時間微分 D_f を

$$\begin{aligned} D_f q(t) &= \lim_{\triangle t \to 0+} \left\langle \frac{q(t+\triangle t) - q(t)}{\triangle t} \right\rangle \\ &= \vec{V}^{(f)}(q, t) \\ &= -\zeta^{-1} \nabla U(q, t) \end{aligned} \tag{19·a}$$

$$(\because (18))$$

のように定義し，後向きの平均時間微分 D_b を次式で定義する。

$$\begin{aligned} D_b q(t) &= \lim_{\triangle t \to 0+} \left\langle \frac{q(t) - q(t-\triangle t)}{\triangle t} \right\rangle \\ &= \vec{V}^{(b)}(q, t) \end{aligned} \tag{19·b}$$

前向き速度 $\vec{V}^{(f)}(q, t)$，後向き速度 $\vec{V}^{(b)}(q, t)$ の導入により，これまでの

$$dq = \vec{V}^{(f)}(q, t)\, dt + dQ(t) \tag{20·a}$$

に加えて，

$$dq = \vec{V}^{(b)}(q, t)\, dt + dQ'(t) \tag{20·b}$$

をとり，それぞれに対応して拡散方程式

$$\partial\rho/\partial t = -\,\mathrm{div}\,(\vec{V}_d^{(f)}\rho) \tag{21·a}$$

$$\partial\rho/\partial t = -\,\mathrm{div}\,(\vec{V}_d^{(b)}\rho) \tag{21·b}$$

が成立し，前向き，および後向き拡散速度は

$$\vec{V}_d^{(f)} = -\,D\nabla\ln\rho + \vec{V}^{(f)} \tag{21′·a}$$

$$\vec{V}_d^{(b)} = +\,D\nabla\ln\rho + \vec{V}^{(b)} \tag{21′·b}$$

である。ここに Q(t)，Q′(t) は同じ分散 D をとるものとしたが，$\vec{V}^{(f)} \neq \vec{V}^{(b)}$ であり，$\vec{V}^{(f)}$ と $\vec{V}^{(b)}$ との関係は次の問題となる。（21·a & b）および（21′·a & b）から次の対称化された形の拡散方程式の組がえられる。

$$\partial\rho/\partial t = -\,\mathrm{div}\,(\vec{V}_d^{(+)}\rho), \tag{22·a}$$

$$\partial\rho/\partial t = -\,\mathrm{div}\,(\vec{V}_d^{(-)}\rho) \tag{22·b}$$

ここに

$$\begin{aligned}\vec{V}_d^{(+)} &= (1/2)\,(\vec{V}_d^{(f)} + \vec{V}_d^{(b)}) \\ &= (1/2)\,(\vec{V}^{(f)} + \vec{V}^{(b)}),\end{aligned} \tag{22′·a}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_d^{(-)} &= (1/2)\,(\vec{V}_d^{(f)} - \vec{V}_d^{(b)}) \\ &= -\,D\nabla\ln\rho + (1/2)\,(\vec{V}^{(f)} - \vec{V}^{(b)})\end{aligned} \tag{22′·b}$$

ところで物質の保存則としての連続式は（22′·a）に対する（22·a）のみであり，明らかに

$$\vec{V}_d^{(-)} = 0 \tag{23}$$

従って

$$(1/2)\,(\vec{V}^{(f)} - \vec{V}^{(b)}) = D\nabla\ln\rho \tag{24}$$

これが $\vec{V}^{(f)}$ と $\vec{V}^{(b)}$ との関係を与える式であり，（22′·a）と（24）とをそれぞ

れ

$$\text{全移動速度} \equiv \vec{v}$$

$$= (1/2)(\vec{V}^{(f)} + \vec{V}^{(b)}) \qquad (25\cdot a)$$

$$\text{純拡散速度} \equiv \vec{u}$$

$$= (1/2)(\vec{V}^{(f)} - \vec{V}^{(b)})$$

$$= D\nabla \ell n\, \rho \qquad (25\cdot b)$$

として定義，導入することとする。

まず $\vec{u}$ についてその時間変化は

$$\partial\vec{u}/\partial t = D\nabla\partial\ \ell n\ \rho/\partial t$$

$$= D\nabla\left\{-\mathrm{div}\,(\vec{v}\,\rho)/\rho\right\}$$

$$= -D\triangle\vec{v} - \nabla(\vec{v}\cdot\vec{u}) \qquad (26)$$

と求まる（∵（22·a），（25·a））。

次に $\vec{v}$ の時間変化とであるが，いま位置座標 q について２次微分まで連続かつ有界な任意関数 $f(q,t)$ に対し，前向きおよび後向きの実質時間微分 D_f および D_b を作用させると次のようになる。

$$D_f f(q,t) = (\partial/\partial t + \vec{V}^{(f)}.\nabla + D\triangle)\, f(q,t),$$

$$D_b f(q,t) = (\partial/\partial t + \vec{V}^{(b)}.\nabla - D\triangle)\, f(q,t) \qquad (27)$$

時間反転に対する対称性を保つために，$\vec{V}^{(f)}$，$\vec{V}^{(b)}$ に対しては次のように作用させる。

$$D_f\vec{V}^{(b)} = (\partial/\partial t + \vec{V}^{(f)}.\nabla + D\triangle)\,\vec{V}^{(b)}$$

$$D_b\vec{V}^{(f)} = (\partial/\partial t + \vec{V}^{(b)}.\nabla - D\triangle)\,\vec{V}^{(f)} \qquad (28)$$

これらにより，外力と釣合うべきドリフトの平均加速度を次のように導入する。

$$\vec{a}(t) \equiv (1/2)(D_f \vec{V}^{(b)} + D_b \vec{V}^{(f)})$$
$$= (1/2)(D_f D_b + D_b D_f)\, q(t) \qquad (29)$$

（28）により（29）は次のように表される。

$$\vec{a}(t) = \partial/\partial t \{(\vec{V}^{(f)} + \vec{V}^{(b)})/2\}$$
$$+ (1/2)(\vec{V}^{(b)} \cdot \nabla \vec{V}^{(f)} + \vec{V}^{(f)} \cdot \nabla \vec{V}^{(b)})$$
$$- D\triangle\{(\vec{V}^{(f)} - \vec{V}^{(b)})/2\}$$
$$= \partial\vec{v}/\partial t + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} - \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}$$
$$- D\triangle\vec{u} \qquad (30)$$

これを並べかえて求めていた次の式がえられる。

$$\partial\vec{v}/\partial t = \vec{a}(t) - \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + D\triangle\vec{u} \qquad (31)$$

$\vec{v}$，$\vec{u}$ ともに非回転性であるから，ベクトル公式

$$(1/2)\,\mathrm{grad}\; r^2 = (\vec{r} \times \mathrm{rot}\; \vec{r}) + \vec{r}\cdot\nabla\vec{r}$$

の右辺第1項は消える。（31）は力のバランスの式であり，

$$m\, \partial\vec{v}/\partial t = m\vec{a} - (m/2)\,\mathrm{grad}\; v^2$$
$$+ (m/2)\,\mathrm{grad}\; u^2 + mD\,\mathrm{grad div}\;\vec{u} \qquad (32)$$

の右辺第3，第4項は純拡散の流れの運動エネルギーによる力，および純拡散の流れの速度ポテンシャルとでもいわれるべき $-mD\,\mathrm{div}\,\vec{u} = mD^2\,\mathrm{div grad}\,\ell n\,\rho$ に由来する力である。（32）と連立に（26）からの力のバランスの式

$$m\,\partial\vec{u}/\partial t = -\,m\,D\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{v}$$
$$-\,m\ \mathrm{grad}\ \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad (33)$$

は力学的な力ではなく純拡散力のバランスで（連続の式に登場する拡散子の）全流れによる速度ポテンシャル $-mD\,\mathrm{div}\,\vec{v}$ から受ける力と $\vec{u}=D\,\mathrm{grad}\,\ell n\,\rho$ と $\vec{v}$ とのカップリングによる力とが寄与する。

$$D = \hbar/2m \qquad (10)$$

および

$$m\vec{a} = -\,\mathrm{grad}\ U(q,t) \qquad (34)$$

とおくことにより，(32)，(33) は，Schrödinger 方程式からの（9・a & b）と「完全に」一致する。かくして「ミクロの論理」＝量子力学（ただし，その非相対論的段階において）は，完全な対応づけのもとに「マクロの論理」＝狭義の拡散過程“Einstein－Smoluchowski process”の kinematics の中に等価なパターンを見出したことが認められる。前者の論理が含む「観測にまつわる主観的確率」が後者の論理が含む「外界から拡散子に及ぶ不可避的，無秩序な擾乱に基く客観的確率」の概念の中に何らかの調和を見出すのではないか？　これが Wiener の differential space の理論の基本思想であるのかもしれない。力学があって stochastic phenomena が成立するのか，あるいは，stochastic mechanics があって mechanics が現われるのか — Wiener は後者に足場をおいて議論を展開しているように思われるが，Wiener process を力学化してみると，Schrödinger の波動力学からの“Causal interpretation (Bohm)”が完結することがわかったといってよいと思う。

§3　問　題　点

ⅰ）拡散子の平均加速度 $\vec{a}(t)$，(29) あるいは (30)，として何が出たのか？

Einstein－Smoluchowski process としては (30) の右辺がその内容で

あるとしか言えない。

Newton の法則 $m\vec{a} = -\mathrm{grad}\ U$ によってポテンシャル力と結ぶことにより，（32）と（9·a）との対応が完結したが，この対応が正確に成立するのは，この E.－S. process ではなくて，（17）の Ornstein－Uhlenbeck process である（科学史を尊重すれば Langevin－Kramers process と言うべきだと思う）。（17）に D_f, D_b を作用させると明らかに，

$$D_f\, q(t) = D_b\, q(t) = {}^{P}\!/_{m},$$

$$m^{-1}\, D_f\, p(t) = -\nabla U/m - \zeta\,({}^{p}\!/_{m}),$$

$$m^{-1}\, D_b\, p(t) = -\nabla U/m + \zeta\,({}^{p}\!/_{m}),$$

$$\therefore\ \vec{a}(t) = (2m)^{-1}\left\{ D_f\, p(t) + D_b\, p(t) \right\}$$

$$= -\nabla U/m$$

が成立する。このことからも，O.－U. process の stochastic mechanics をつくることは興味がある。

量子力学の形成時期における

$$\begin{tikzcd}
\text{幾何光学} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Hamilton－gacobi 形式の力学} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{波動光学} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{波動力学}
\end{tikzcd}$$

の対応の図式を想起すれば，次のようなことになりそうである。

$$\begin{tikzcd}
\text{Einstein－Smoluchowski 過程} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{波動力学 Schrödinger eq.} \arrow[d] \\
\text{Ornstein－Uhlenbeck 過程} \arrow[r, leftrightarrow] & ?
\end{tikzcd}$$

ⅱ) 量子力学と拡散過程との不確定性関係が，$D=\hbar/2m$ の対応関係を一応成立させているかにみえるが，

$$\langle \Delta q^2 \rangle / 2\Delta t = \hbar / 2m$$

という拡散定数は何を意味しているのであろうか？

これに対する“物性論的解答”は意味がなさそうであるが，“物性論的描像”は与える価値がありそうに思われる。$\zeta = mk^{T}/\hbar = m\nu$ という抵抗係数が何との摩擦によって生じ，ν という振動数は何が与えているとみなし，さらに拡散というマクロな過程の質的特徴「不可逆性」はどうなってしまったのか，等々。

ⅲ) 波動光学から幾何光学に移る際にも，例えば $\Delta\psi = u^{-2}\ddot{\psi}$ に $\psi=\varphi\exp(-i\omega t)$ さらに $\varphi = A\exp(2\pi i S)$ ととると，必ず $(\nabla S)^2 = \lambda^{-2} + (\Delta A/A)$；$\mathrm{div}(A^2\nabla S)=0$ の形，従って $(\Delta A/A)$ の項が現われる。

通常は $\partial\lambda/\partial q \sim \epsilon$ として $(\Delta A/A) \sim (\epsilon/\lambda)^2$ として波長に比して媒質の不均質性 ϵ が十分小を考えて無視するのであるが，Bohm の量子ポテンシャルと軌を一にしており，従って，拡散の kinematics で解釈できそうである。この逆はそうではなく，例えば $\nabla S/h = p/h = \sqrt{2m(E-U)}/h = 1/\lambda$，位相速度 $u = h\nu/p = E/\sqrt{2m(E-U)}$ で波動方程式に移行しうるわけであるから，真実の問題点は，$\psi = \exp(R/\hbar)\exp(iS/\hbar)$ と強制する処にある。量子力学の物性物理的描像の確定が，即，Causal Interpretation の探究だとすればBrownian Movement は依然興味ある描像と問題とを提起していると言えそうである。光量子の粒子ー波動2重性を明快に示してくれた（Einstein，1909）のもゆらぎの理論であったことを想い起すと一層の興味がわくように思われる。

（昭和44年8月3日夜。TVは自民党による大学措置法強行採決を報じた）

参　考　文　献

1） N.Wiener, A.Siegel, B.Rankin, and W.T.Martin; "Differential Space, Quantum Systems, and Prediction," M.I.T. Press, (1966); Special Ed. Univ. of Tokyo

Press,

2) N. Saito and M. Namiki; Prog. Theor. Phys., Kyoto, **16**, 71 (1956); 斎藤, 並木; 物性研究, 78号 (1954, 11月) 95.

3) D. Bohm; Phys. Rev., **85**, 166 (1952); D. Bohm and J. P. Vigier; ibid., **96**, 208 (1954). 高木武彦, 「統計的及び流体力学的描像と量子力学」基礎科学 No. 29, 940 (1952), L. de Broglie, "Étude critique des bases de l'interpretation actuelle de la mécanique ondulatoire," Gauthiers-Villars, Paris (1963).

4) I. Fényes; Z. für Physik, **132**, 81 (1952); W. Weizel; ibid., **134**, 264 (1953); **135**, 270 (1953); **136**, 582 (1954); E. Nelson; "Dynamical Theories of Brownian Motion," Preliminary Informal Notes in Mathematics, Princeton Univ. Press (1967).

5) N. Wax, ed., "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes," Dover Publ. (1954).